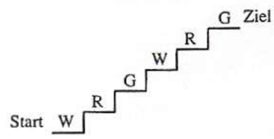
Ohne Aufgabe 3.

Bei einem Kinderfest wurde eine Treppe mit 5 Stufen für ein Spiel vorbereitet.



Das Startplateau (0. Stufe) und die folgenden Stufen sind mit den Farben Weiß (W), Rot (R) und Grün (G) markiert, wie es die Skizze zeigt. Ziel des Spiels ist, die 5. Stufe zu erreichen. Um die nächsthöhere Stufe zu erreichen, muß man mit einem Laplacewürfel, von dessen Flächen je zwei weiß, grün und rot gefärbt sind, die entsprechende Farbe werfen. Wirft man diese Farbe nicht, so muß man auf der bisherigen Stufe stehenbleiben.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt man mit genau 5 Würfen ins Ziel? (2 BE)
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,
      α) bei 12 Würfen genau viermal voranzukommen
      β) mit genau 13 Würfen ins Ziel zu kommen. (7 BE)
   c) Wie oft muß ein Kind mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Stufe höherzusteigen? (6 BE)

Nun wird die Regel für die Stufen 1 bis 4 so abgeändert, daß man auf die nächstniedrigere Stufe steigen muß, wenn deren Farbe geworfen wird.

2. a) Ein Kind steht auf dem Startplateau. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_1"Der erste Wurf ist Weiß" und E_2: "Nach seinen ersten beiden Würfen steht es auf der 1. Stufe" unabhängig sind.
   $\left[\text{Teilergebnis: } P(E_2) = \frac{1}{3}\right]$ (7 BE)
   b) Veronika steht auf der 4. Stufe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie spätestens nach drei weiteren Würfen das Ziel? (7 BE)

3. Johanna glaubt, daß der Würfel gezinkt ist, und vermutet, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 aus Teilaufgabe 2a nicht $\frac{1}{3}$, sondern nur $\frac{1}{5}$ ist. Sie will ihre Vermutung annehmen, wenn nach den ersten beiden Würfen von 30 Kindern höchstens 7 auf der 1. Stufe stehen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie die Vermutung an, obwohl $P(E_2) = \frac{1}{3}$ ist? (5 BE)
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwirft sie die Vermutung irrtümlich? (6 BE)

(40 BE)

Lösungen

1. a) P ("genau 5 Treffer") $= \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

b) α) Um bei 12 Würfen genau 4 Treffer und damit 8 Nieten zu haben, gibt es

$\frac{12!}{4!8!}$ Möglichkeiten.

Mit $\frac{12!}{4!8!} = 495$ errechnen wir

P ("genau vier Treffer") $= 495 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0,2384\ldots \approx 23,8\,\%$

β) Um mit genau 13 Würfen ins Ziel zu kommen, bedarf es aufbauend auf Aufgabe α) noch eines weiteren Treffers:

P ("genau 13 Würfe") = P ("genau vier Treffer") $\cdot \frac{1}{3} = 0,0794\ldots \approx 7,9\,\%$

c) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette unbekannter Länge mit mindestens einem Treffer und dem Parameter $p = \frac{1}{3}$.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) > 0,9$$

$$P(Z = 0) < 0,1$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,1$$

$$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,1$$

$$n \cdot \ln\frac{2}{3} < \ln 0,1$$

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln\frac{2}{3}} \quad \text{(Umkehrung des Ungleichheitszeichens wegen } \ln\tfrac{2}{3} < 0\text{)}$$

$$n > 5,678\ldots \Rightarrow n \geq 6$$

Es muß also mindestens 6mal gewürfelt werden.

2. a) $P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Um mit zwei Würfen auf der 1. Stufe zu stehen, gibt es drei Kombinationen, von denen jede die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ besitzt: WR, RR, GR,

insgesamt also $P(E_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Ereignisse sind unabhängig, wenn

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

$P(E_1 \cap E_2) = P(WR) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

E_1 und E_2 sind also unabhängig.

b) Das Ziel erreicht Veronika mit dem Würfeln von G; das kann nach ein-, zwei- oder dreimaligem Werfen der Fall sein:

G oder RG oder RRG oder WRG, also gilt:

$$P(G) + P(RG) + P(RRG) + P(WRG) =$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} =$$
$$\frac{9}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{14}{27}$$

3.

	Entscheidung aufgrund der Stichprobe	
	Annahme von H_0	Ablehnung von H_0
	8............30	0............7
$H_0: p_0 = \frac{1}{3}$		α
$H_1: p_1 = \frac{1}{5}$	β	

a) Es handelt sich um einen Fehler 1. Art.

$$\alpha = P_{\frac{1}{3}}^{30}(Z \le 7) = \sum_{k=0}^{7} B\left(30; \frac{1}{3}; k\right) \approx 16{,}7\%$$

(Tabelle, kumulativ)

b) Es handelt sich um einen Fehler 2. Art.

$$\beta = P_{\frac{1}{5}}^{30}(Z > 7) = \sum_{k=8}^{30} B\left(30; \frac{1}{5}; k\right) = 1 - \sum_{k=0}^{7} B\left(30; \frac{1}{5}; k\right)$$

$\approx 23{,}9\%$ (Tabelle, kumulativ)